第二章 极限与连续

2.2 极限的运算法则

（1）极限四则运算

一 函数极限的运算法则

定理 设 $\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$, 则

(1) $\lim[f(x)+g(x)]=\lim f(x)+\lim g(x)=A+B.$

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B.$

若 $g(x)=C$(常数)，则

$$\lim[Cf(x)]=c\lim f(x)=CA$$

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$, 其中$B\neq 0.$

证明 略

注：(1)、(2) 式可以推广到有限个函数的情况，例如

$$\lim_{x \to x_0} [u_1(x) + u_2(x) + u_3(x)]$$

$$= \lim_{x \to x_0} u_1(x) + \lim_{x \to x_0} u_2(x) + \lim_{x \to x_0} u_3(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} [u_1(x) \cdot u_2(x) \cdot u_3(x)]$$

$$= \lim_{x \to x_0} u_1(x) \cdot \lim_{x \to x_0} u_2(x) \cdot \lim_{x \to x_0} u_3(x)$$

二、求极限方法举例

例1 求 $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-x+5)$.

根据 $\lim\limits_{x\to x_0} P(x)=P(x_0)$

解 $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-x+5)$

$=3\cdot 2^2-2+5 \quad =15.$

例2 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x+3}{x^3-x+5}$.

根据 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$

(其中$Q(x_0)\neq 0$)

解 因为 $1^3-1+5\neq 0$

所以 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x+3}{x^3-x+5}=\dfrac{1^2+2+3}{1^3-1+5}=\dfrac{6}{5}.$

例3 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$.　　　　"$\dfrac{0}{0}$" 型

解 $x\to 1$ 时，分子、分母的极限都是零.

先因式分解，找出无穷小量因子 $(x-1)$，

约去不为零的 "零因子" $(x-1)$，再求极限.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to 1}(x+1)$$

$$=2.$$

(消 "零因子" 法)

例4 求 $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-9}{x^2+7x+12}$. “$\dfrac{0}{0}$”型

解 先因式分解找“零因子”$(x-3)$，再求极限.

$$\lim_{x\to-3}\frac{x^2-9}{x^2+7x+12}=\lim_{x\to-3}\frac{(\cancel{x+3})(x-3)}{(\cancel{x+3})(x+4)}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{x-3}{x+4}$$

$$=\frac{-3-3}{-3+4}=-6.$$

(消“零因子”法)

练习：求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$　　（2）$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{x^2-3}$

（3）$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}$　　（4）$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

例5 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+x}{x^3+1}$.　　“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型

解 $x\to\infty$时，分子、分母都是无穷大量.

先用分子、分母中 x 的最高次幂x^3 除分子和分母，

分出无穷小量，再求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+x}{x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^3+x}{x^3}}{\dfrac{x^3+1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^3}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}=3.$$

例6 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+2x-1}{2x^3+8}$.

解: 仿照例5，先用分子、分母中 x 的最高次幂x^3 除分子和分母，分出无穷小量，再求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+2x-1}{2x^3+8}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{4x^2+2x-1}{x^3}}{\dfrac{2x^3+8}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{2+\dfrac{8}{x^3}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3})}{\lim\limits_{x\to\infty}(2+\frac{8}{x^3})}=\frac{0}{2}=0$$

例7 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x^2-7}{5x^2+3}.$

解： 若按照例5，例6，先用分子、分母中 x 的最高次幂x^4 除分子和分母的话，会使分母的极限为零，仍不能用极限的运算法则。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x^2-7}{5x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^4+2x^2-7}{x^4}}{\frac{5x^2+3}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x^2}-\frac{7}{x^4}}{\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^4}}=\frac{3}{0}$$

实际上，可以用下面的方法计算：

因为：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+3}{3x^4+2x^2-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{5x^2+3}{x^4}}{\dfrac{3x^4+2x^2-7}{x^4}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{3}{x^4}}{3+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{7}{x^4}}=\frac{0}{3}=0$$

所以：$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x^2-7}{5x^2+3}=\infty$$

将例5 、例6、例7的方法总结可得如下的结果:

当$a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, m和n为非负整数时有

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当} n = m, \\ 0, & \text{当} n > m, \\ \infty, & \text{当} n < m. \end{cases}$$

例8 求 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$. “$\infty-\infty$”型

解 $x\to1$时, 两个式子都是无穷大量.

先通分，再求极限.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x+1-2}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}.$$

*例9　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$.　　"$\infty-\infty$" 型

解　先分子（或分母）有理化后，再求极限.

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}+x)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\boxed{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}+1}$$

$$\sqrt{1}=1$$

$$=\frac{1}{2}.$$

求极限方法小结:

(1) 设$P(x)$为多项式，则 $\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$.

(2) 设$P(x),Q(x)$均为多项式，且 $Q(x_0) \neq 0$, 则

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

(3) 若 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 为"$\frac{0}{0}$"型时，用消"零因子".

(4) 当$a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, m 和 n 为非负整数时

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & \text{当} n=m,\\ 0, & \text{当} n>m,\\ \infty, & \text{当} n<m.\end{cases}$$

(5) 若 $\lim[f(x)-g(x)]$ 为"$\infty-\infty$"型时，一

是先通分或有理化后，在求极限.

练习：求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3}{6x^2-1}$

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{100x}{x^2+1}$

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-8x+1}{x^2+5}$

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$