



第二章 极限与连续

2.3 无穷小与无穷大



一、无穷小量

定义一 如果在 x 的某种趋向下, 函数 $f(x)$ 以零为极限, 则称在 x 的这种趋向下, 函数 $f(x)$ 是**无穷小量**.

例如, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$, 函数 $\sin x$ 当 $x \rightarrow 0$ 时是无穷小量.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, 函数 $\frac{1}{x}$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时是无穷小量.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0,$$

数列 $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时是无穷小量.

注意:

1. 无穷小量是函数（变量），不能与很小的数混淆；
2. 零是可以作为无穷小量的唯一的数.
3. 说函数 $f(x)$ 是无穷小量，一定要指明 x 的变化趋向.

例如， $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 4) = 0$,

函数 $f(x) = 2x - 4$ 当 $x \rightarrow 2$ 时是无穷小量.

但函数 $f(x) = 2x - 4$ 当 $x \rightarrow 1$ 时不是无穷小量.



无穷小量的性质：

- 1: 有限个无穷小量之和仍为无穷小量.
- 2: 若 $\lim \alpha(x) = 0$, $f(x)$ 为有界函数, 则
$$\lim \alpha(x) f(x) = 0.$$
- 3: 常数与无穷小的乘积仍为无穷小量.
- 4: 有限个无穷小量的乘积仍为无穷小量.



例 求 $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)\sin x$.

解：当 $x \rightarrow 1$ 时， $(x-1)$ 是无穷小量，
 $\sin x$ 是有界函数。

因此， $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)\sin x = 0$.

性质：

若 $\lim \alpha(x) = 0$ ，
 $f(x)$ 为有界函数，
则

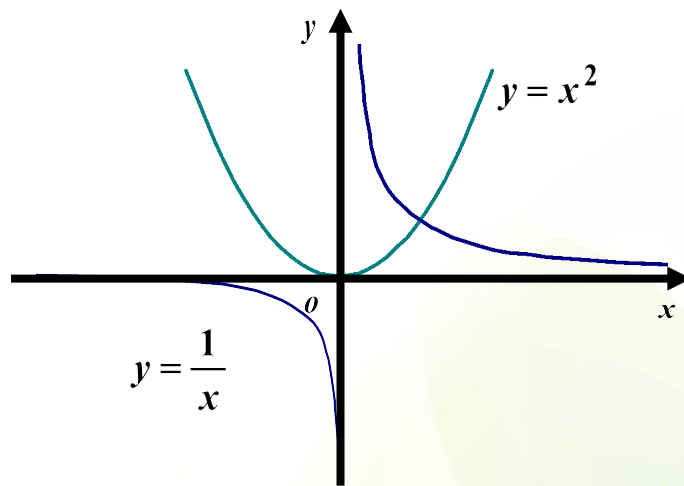
$\lim \alpha(x) f(x) = 0$.

二、无穷大量

定义一 如果在 x 的某种趋向下，函数 $f(x)$ 的绝对值可以任意地大，则在 x 的这种趋向下，称函数 $f(x)$ 是无穷大量. 记作 $\lim f(x) = \infty$.

例如： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty.$$



注意： 无穷大量是函数，不能与很大的数混淆.



无穷小与无穷大的关系：

定理：

在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，
则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小，反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且

$f(x) \neq 0$ 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大。

利用无穷大量和无穷小量的关系可以求一些函数的
极限。



例

求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 8}$.

$\frac{\infty}{\infty}$ ”

解： 先用分子、分母中 x 的最高次幂 x^3 除分子和分母，分出无穷小量，再求极限.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 8} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x^2 + 2x - 1}{x^3}}{\frac{2x^3 + 8}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{2 + \frac{8}{x^3}}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{8}{x^3} \right)} = \frac{0}{2} = 0$$



例 求 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x+1}$.

“ $\frac{A}{0}$ ” 型

解 因为分母的极限 $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1) = 0$,

利用无穷大量与无穷小量的关系, 考虑倒函数的极限.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x-1} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)}{\lim_{x \rightarrow -1} (x-1)} = \frac{0}{-2} = 0.$$

因此, $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x+1} = \infty$.

三、无穷小的比较

观察函数 $\frac{1}{x}$ 与 $\frac{1}{x^2}$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时的变化情况

x	10	100	10 000	... $\rightarrow +\infty$
$\frac{1}{x}$	0.1	0.01	0.0001	... $\rightarrow 0$
$\frac{1}{x^2}$	0.01	0.0001	0.00000001	... $\rightarrow 0$

显然, $\frac{1}{x^2}$ 趋向于 0 要比 $\frac{1}{x}$ 趋向于 0 快.

利用无穷小量比值的极限情况来衡量这种“快”与“慢”.



设 $\lim \alpha(x) = 0$, $\lim \beta(x) = 0$,

定义一: 如果 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ ($\beta(x) \neq 0$), 则称 $\alpha(x)$

是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小量.

定义二: 如果 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$ ($\beta(x) \neq 0$), 则称

$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的同阶无穷小量.

当 $A = 1$ 时, 即 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等

阶无穷小量或相当无穷小量, 记作 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.



例如，当 $x \rightarrow 0$ 时， $\sin x$ 与 x 均为无穷小量，
而 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ，则称当 $x \rightarrow 0$ 时， $\sin x$ 与 x 是
等价无穷小量。

即：当 $x \rightarrow 0$ 时 $\sin x \sim x$





定理： 设 $\alpha(x) \sim \alpha'(x)$, $\beta(x) \sim \beta'(x)$.

如果 $\lim \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$ 存在, 则 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 也存在:

$$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}.$$

定理指出了求极限时, 分子与分母中的无穷小量因子可用其**等价无穷小量**代换.

常用的等价无穷小量:

$$\sin x \sim x \quad (x \rightarrow 0), \quad \tan x \sim x \quad (x \rightarrow 0),$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \quad (x \rightarrow 0),$$

$$\ln(1+x) \sim x \quad (x \rightarrow 0), \quad e^x - 1 \sim x \quad (x \rightarrow 0),$$

$$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n} \quad (x \rightarrow 0).$$



例: 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$.

解
: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\sin x \sim x$.

所以
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x \cdot x} = \frac{1}{2}.$$



例：求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\ln(1+3x)}$.

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x \sim x$, $\ln(1+3x) \sim 3x$.
:

所以
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\ln(1+3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}.$$



例 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x \tan x^2}.$

解 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(\frac{\cos x - 1}{\cos x} \right)}{x \cdot x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \left(-\frac{1}{2} x^2 \right) \cdot \frac{1}{\cos x}}{x \cdot x^2} = -\frac{1}{2}.$$



练习：利用等价代换求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{1 - \cos x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - 1) \sin x}{\ln(1 + 2x)(1 - \cos 2x)}$$